Intensivos 2018

MA1112 - Matemáticas II

Solución Parcial 2 (35 %)

Turno 2-3

Pregunta 1

(8 ptos.) Resuelva $\displaystyle\int \frac{4x^3+5x^2+8x-12}{x^2(x^2+4)}\mathrm{d}x$

Solución

Dado que el integrando es una función racional propia, podemos aplicar Descomposición en Fracciones Simples (DFS) a esta función y luego integramos. Esto es, hacemos:

$$\frac{4x^3+5x^2+8x-12}{x^2(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \tag{1}$$

Multiplicando por el denominador a ambos lados y luego reordenando, tenemos

$$\begin{aligned} 4x^3+5x^2+8x-12 &= Ax(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)x^2 \\ &= Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Dx^2 \\ &= (A+C)x^3+(B+D)x^2+(4A)x+(4B) \end{aligned}$$

Lo cual genera el sistema:

$$\begin{cases} A+C=4 \\ B+D=5 \\ 4A=8 \\ 4B=-12 \end{cases}$$

De donde se deduce fácilmente que $A=2$, $B=-3$, $C=2$ y $D=8$. Sustituyendo estos valores en (1), obtenemos que

$$\frac{4x^3+5x^2+8x-12}{x^2(x^2+4)} = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2x+8}{x^2+4}$$

Integrando a ambos lados obtenemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^3+5x^2+8x-12}{x^2(x^2+4)}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2x+8}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\int\frac{\mathrm{d}x}{x} - 3\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int\frac{2x}{x^2+4}\mathrm{d}x + 8\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2^2} \\ &= 2\ln|x| + \frac{3}{x} + \ln|x^2+4| + \cancel{8}\frac{1}{\cancel{2}}\mathrm{arctg}(\tfrac{x}{2}) + C \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\int \frac{4x^3+5x^2+8x-12}{x^2(x^2+4)}\mathrm{d}x = \frac{3}{x} + \ln(x^4+4x^2) + 4\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C}$$

Pregunta 2

(4 ptos.) Haga uso del cambio de variable $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ para resolver la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\operatorname{sen} x}$

Solución

Si hacemos el cambio $\boxed{t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$, tenemos que $\boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$ y $\boxed{\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}}$. Sustituyendo en la integral tenemos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\operatorname{sen} x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{\frac{2dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{1+t^2-2t}{\cancel{1+t^2}}} \\
&= \int \frac{2\mathrm{d}t}{(t-1)^2} \\
&= -\frac{2}{t-1} + C \quad \text{(Devolviendo el cambio)} \\
&= \boxed{\frac{2}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} + C}
\end{aligned}$$

Pregunta 3

(3 ptos. c/u) Determine la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\textbf{a)} \int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} \qquad\qquad \textbf{b)} \int_1^\infty \frac{\ln x}{x\,e^{\pi x}}\,\mathrm{d}x$$

Solución

a) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$. Notemos que si $x \to 1^+$ entonces $|f(x)| \to \infty$. De aquí que

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} &= \lim_{a\to 1^+} \int_a^e \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} \\
&= \lim_{a\to 1^+} [\ln|\ln x|]_a^e \\
&= \lim_{a\to 1^+} [\ln|\ln e| - \ln|\ln a|] \quad \text{(Haciendo sustitución ingenua)} \\
&= \cancel{\ln|1|} - \ln|\ln 1^+| \\
&= -\ln|0^+| = \infty
\end{aligned}$$

Luego, como la integral nos da infinito podemos concluir que la integral $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ $\boxed{\text{diverge}}$

b) Notemos que como $x \geq 1$, entonces se satisface la desigualdad $\ln x < x$. Luego, dividiendo ambos lados por $xe^{\pi x}$ obtenemos que $\dfrac{\ln x}{xe^{\pi x}} < \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}e^{\pi x}} = e^{-\pi x}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\ln x}{x\,e^{\pi x}}\,\mathrm{d}x &< \int_1^\infty e^{-\pi x}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-\pi x}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{\pi}e^{-\pi x}\right]_1^b \\
&= -\frac{1}{\pi}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-\pi b} - e^{-\pi}\right] \quad \text{(Haciendo sustitución ingenua)} \\
&= \frac{1}{\pi e^\pi} - \cancel{\frac{1}{\pi e^\infty}} = \frac{1}{\pi e^\pi}
\end{aligned}$$

Finalmente, por el criterio de comparación para el estudio de la convergencia de integrales impropias, como la integral $\int_1^\infty e^{-\pi x}\mathrm{d}x$ converge, entonces la integral $\int_1^\infty \dfrac{\ln x}{x\,e^{\pi x}}\,\mathrm{d}x$ también $\boxed{\text{converge}}$.

Pregunta 4

(5 ptos.) La base de un sólido es la región R limitada por las rectas $y = x+2$, $y+x+4 = 0$ y el eje Y. Calcule el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje X son triángulos equiláteros con uno de sus lados sobre R.

Solución

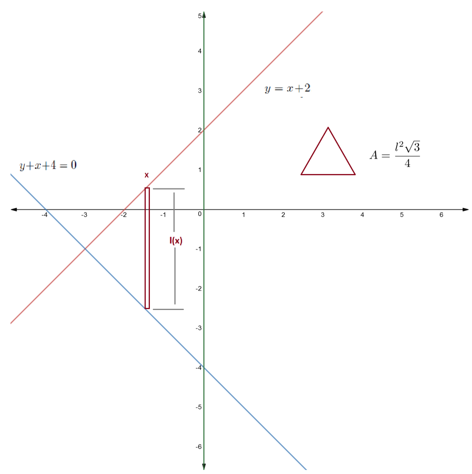

Figura 1: Pregunta 4

La región R es un triángulo con vértices $(-3,-1)$ (donde las rectas dadas se intersecan), $(0,2)$ y $(0,-4)$ (donde las rectas cortan al eje Y). Luego, como las secciones transversales son perpendiculares al eje X, nuestro rectángulo representativo también lo es, y permite determinar que la integral que representa el volumen del sólido será con respecto a x. Además, ésta irá desde -3 a 0, barriendo el área de un triángulo equilátero. Entonces tenemos que

$$V = \int_{-3}^{0} A(x)\mathrm{d}x$$

Donde $A(x)$ representa el área de un triángulo equilátero para un $x \in [-3,0]$, y uno de sus lados igual a la longitud del rectángulo representativo. Para determinar $A(x)$ debemos conocer el área de un triángulo, el cual es base por altura entre dos. Sin embargo, es también conocido, en particular, que el área de un triángulo equilátero puede determinarse conociendo únicamente la longitud de uno de sus lados, lo cual es más conveniente en nuestro caso. La fórmula viene dada por $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, donde l representa uno de los lados del triángulo equilátero. Entonces,

$$A(x) = \frac{l^2(x)\sqrt{3}}{4}$$

Para determinar $l(x)$, el lado del triángulo, debemos conocer los valores de y para $x \in [-3, 0]$ fijo. De las ecuaciones de las rectas obtenemos que $y = x + 2$ y $y = -(x+4)$, y como la primera siempre es mayor o igual que la segunda en dicho intervalo, observamos que $l(x) = (x+2) - (-(x+4)) = 2x + 6$. Luego,

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-3}^{0} A(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-3}^{0} \frac{l^2(x)\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-3}^{0} (2(x+3))^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}}\int_{-3}^{0} \cancel{4}(x^2+6x+9)\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{3}\left[\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x\right]_{-3}^{0} \\
&= \sqrt{3}\left((0) - \left(-\frac{9\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}} + \cancel{3(9)} - \cancel{9(3)}\right)\right) \\
&= \sqrt{3}(9) = \boxed{9\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Pregunta 5

Sean las funciones $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x - x^2$. Sea R_1 la región del plano limitada por $f(x)$, $g(x)$ y la recta $x = -1$. Sea R_2 la región del plano limitada por $f(x)$ y $g(x)$.

a) (4 ptos.) Exprese el área de la región R_1 por medio de integrales.

b) (4 ptos.) Exprese el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar la región R_2 en torno a la recta $y = -1$, por medio de integrales.

c) (4 ptos.) Exprese el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar la región R_2 en torno a la recta $x = -\frac{1}{2}$, por medio de integrales.

Solución

a) Primero intersecamos las funciones para hallar los límites de integración. Entonces, de $x^2 - 1 = x - x^2$ obtenemos que $2x^2 - x - 1 = 0$. De aquí que $(2x+1)(x-1) = 0$. Entonces f y g se intersecan cuando $x = -\frac{1}{2}$ o $x = 1$.

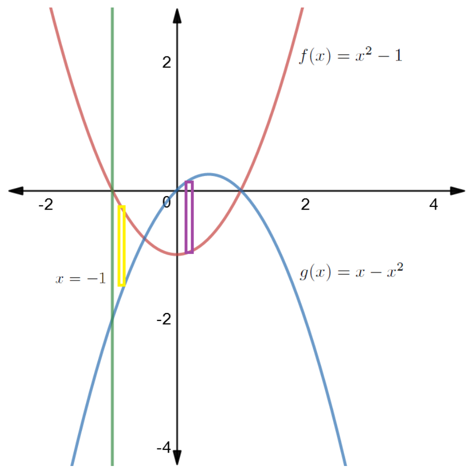

Figura 2: Pregunta 5a

Luego, notemos que como R_1 es la región limitada por f, g y $x = -1$ simultáneamente, corresponde únicamente a la región en el gráfico de la Figura 2 comprendida entre $x = -1$ y $x = -\frac{1}{2}$. Así, la integral que representa el área de R_1 viene dada por:

$$\begin{aligned} A(R_1) &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left[(x^2 - 1) - (x - x^2)\right] \mathrm{d}x \\ &= \boxed{\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(2x^2 - x - 1\right) \mathrm{d}x} \end{aligned}$$

b) Tenemos que R_2 es la región limitada por las gráficas f y g, y ésta gira en torno a la recta $y = -1$.

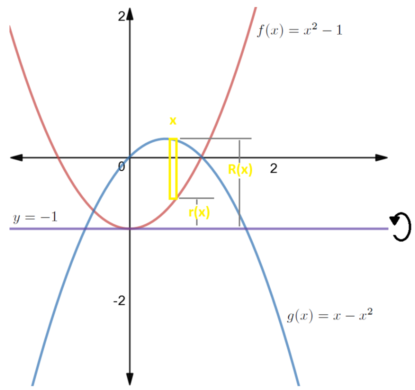

Figura 3: Pregunta 5b

Utilizaremos el método de arandelas para expresar el volumen del sólido de revolución que se genera. Dado que nuestro rectángulo representativo es perpendicular al eje de rotación tenemos que nuestra integral será respecto a x. Luego, en la parte **a)** determinamos los puntos de intersección de las funciones, por lo que hasta ahora tenemos que

$$V = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left[R^2(x) - r^2(x)\right] \mathrm{d}x$$

Donde $R(x)$ y $r(x)$ representan el radio mayor y menor de la arandela, respectivamente. Gráficamente vemos que para un $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$ fijo:

$$\begin{aligned} R(x) = \quad & (x - x^2) - (-1) & = 1 + x - x^2 \\ r(x) = \quad & (x^2 - 1) - (-1) & = x^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula de volumen de arriba obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} V \quad &= \quad \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left[(1 + x - x^2)^2 - (x^2)^2\right] \mathrm{d}x \\ &= \quad \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left[(1 + x - x^2 - x^2)(1 + x - x^2 + x^2)\right] \mathrm{d}x \\ &= \quad \boxed{\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (1 + x - 2x^2)(1 + x) \mathrm{d}x} \end{aligned}$$

c) Tenemos que R_2 es la región limitada por las gráficas f y g, y ésta gira en torno a la recta $x = -\frac{1}{2}$.

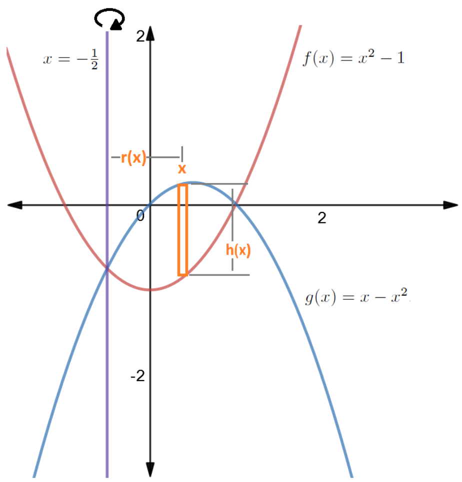

Figura 4: Pregunta 5c

Utilizaremos el método de cascarones cilíndricos para determinar el volumen del sólido de revolución que se genera. Dado que nuestro rectángulo representativo es paralelo al eje de rotación, la integral que buscamos será respecto a x, y por las partes **a)** y **b)** ya tenemos los límites de integración. Así que hasta ahora tenemos que

$$V = 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{1} r(x)h(x)\mathrm{d}x$$

Donde $r(x)$ y $h(x)$ son el radio del cilindro representativo (o la distancia del rectángulo representativo al eje de rotación) y la altura del mismo (o la altura del rectángulo representativo), respectivamente. Para determinarlos, vemos gráficamente que para un $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$ fijo:

$$\begin{aligned} h(x) &= \quad (x-x^2)-(x^2-1) &&= 1+x-2x^2 \\ r(x) &= \quad (x)-\left(-\tfrac{1}{2}\right) &&= x+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula del volumen de arriba obtenemos finalmente que

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(1 + x - 2x^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \cancel{2}\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{2x+1}{\cancel{2}}\right)\left(1 + x - 2x^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \boxed{\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (2x+1)(1+x-2x^2)\mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$